Oriëntatie Wiskunde

Mirjam Dür
Jaap Top
Roel Verstappen

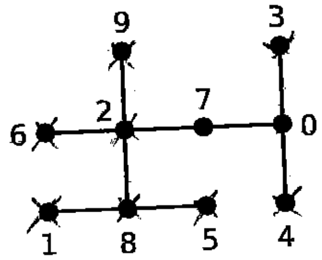
Tentamen 12 November 2010

Opgave 1:
Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$ geldt dat

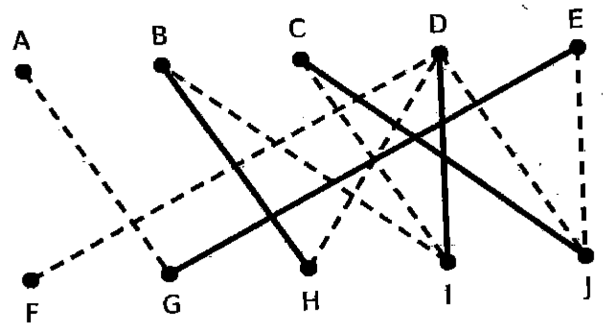
$$(1-\tfrac{1}{2}) \cdot (1-\tfrac{1}{3}) \cdot (1-\tfrac{1}{4}) \cdot \ldots \cdot (1-\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n}.$$

Opgave 2:
Bepaal voor de onderstaande graaf G met wortel 0

1. de voorganger-code (= father-code),
2. de extended Prüfer-code,
3. de Prüfer-code.



Opgave 3:
In de onderstaande graaf zie je een (niet perfecte) matching. Bepaal in deze graaf een aanvullend pad (=augmenting path) van A naar F, en bepaal daarmee een perfecte matching in de graaf.



Opgave 4:
We bekijken het probleem om een minimale opspannende boom te vinden in een graaf met kosten op de takken. Bewijs de stelling:

Als alle takken in de graaf verschillende kosten hebben, dan is er precies één minimale opspannende boom.

Z.O.Z.

Opgave 5:
Bereken gehele getallen x, y waarvoor geldt $187x + 217y = 3$.

Opgave 6:
Laat zien dat als n een positief geheel getal is, dan is $2^n - 3$ *niet* deelbaar door 7.

Opgave 7:
Gegeven drie gehele getallen a, b, c waarbij $c \neq 0$.

1. Bewijs, dat $\text{ggd}(a, c)$ en $\text{ggd}(b, c)$ delers zijn van $\text{ggd}(ab, c)$.
2. Laat zien dat niet in alle gevallen geldt $\text{ggd}(ab, c) = \text{ggd}(a, c) \cdot \text{ggd}(b, c)$.

Opgave 8:
Een bal die wordt losgelaten onder water stijgt met snelheid v naar het wateroppervlak. De stijgsnelheid hangt af van de massadichtheid ρ_b en straal R van de bal, van de valversnelling g t.g.v. het zwaartekrachtveld, en van de massadichtheid ρ_w en kinematische viscositeit ν van water. De dimensie van ν wordt gegeven door $[\nu] = L^2/T$, waarbij L en T lengte en tijd voorstellen.

1. Pas een dimensie-analyse toe, en reduceer het aantal parameters van dit probleem.
2. Volgens Stokes geldt
$$v = \frac{2gR^2(\rho_b - \rho_w)}{9\nu\rho_w}$$
Wat is het verband tussen de wet van Stokes en onderdeel (a) van deze opgave?

Opgave 9:
Op tijd $t > 0$ en plaats x (met $0 < x < \infty$) voldoet de massadichtheid $u(x, t)$ van een stof aan de diffusievergelijking
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
Verder is gegeven dat $u(0, t) = u_o$ en $\lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0$ (voor alle $t > 0$), en op $t = 0$: $u(x, 0) = 0$. De constante D heet de diffusie-coefficient.

1. Toon aan dat de dimensie van D wordt gegeven door $[D] = L^2/T$, waarbij L en T lengte en tijd voorstellen.
2. We nemen aan dat u afhangt van x, t, D en u_0. Laat m.b.v. een dimensie-analyse zien dat
$$u = u_0 f(\eta) \qquad \text{waarbij} \qquad \eta = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$$
3. Toon aan dat
$$2f''(\eta) = -\eta f'(\eta)$$